

ヘリシティ注入型スフェロマック・プラズマの 電磁流体力学的平衡計算

神吉 隆司

Computation of Magnetohydrodynamic Equilibrium of Helicity-injected Spheromak Plasma

Takashi KANKI

(Received November 15, 2000 — Accepted December 19, 2000)

Abstract

The current drive experiment of a spheromak plasma has been successfully performed by DC helicity injection in the FACT device at Himeji Institute of Technology. In the experiment, the flux conserver and the DC helicity injector composed of two electrodes and a bias divertor coil are actually used. As the result, they construct a complicated geometry. Magnetohydrodynamic equilibrium configurations of the spheromak plasma in the realistic region are numerically determined by using the combination of the finite difference and the boundary element method. Several numerical results for equilibrium configurations and their equilibrium quantities are calculated. On the basis of the results, the effects of bias divertor coil on the equilibrium configurations of the helicity-injected spheromak plasma are investigated.

1. はじめに

姫路工業大学ではスフェロマック型のプラズマ発生装置 FACT(Flux Amplification Compact Torus) を製作し、1986 年 7 月から実験を開始している。本装置で行っているスフェロマック研究は核融合研究開発の中でもコンパクト・トーラス研究の分野に属し、核融合炉構造の単純化、連続運転化、高ベータ化を具体化することを目指している。スフェロマックの生成法の一つに磁化同軸プラズマ・ガンを用いる方法がある。ガンによって生成されたプラズマはフラックス・コンサーバー (Flux Conserver, FC) と呼ばれる金属製の容器に射出され、そこでスフェロマック配位を形成する。しかし、プラズマを閉じ込め

るポロイダル磁場とトロイダル磁場を作るプラズマ電流は、プラズマの電気抵抗のため減衰してしまう。定常維持を行うためには、何らかの方法でプラズマ電流の駆動を実施する必要がある。FACT 装置では電極を用いて静電的に磁気ヘリシティを注入することによって、プラズマ電流の駆動を行っている。また、磁気ヘリシティ注入法によって定常維持されるスフェロマック (Helicity-Driven Spheromak, HD-SPK) 配位¹⁻⁶⁾にはコア・プラズマを取り囲み、電極を貫くオープン磁束がある。図 1 に示しているように、FACT 装置⁴⁾ではオープン磁束をバイアス・ダイバータ・コイルによって生成し、中央のカソード電極を用いて同オープン磁束に沿ってポロイダル電流を流している。このとき、コイルカバーはアノード電極の役割を果たす。ポロイダル電流は電磁流体力学的 (Magnetohydrodynamic, MHD) 緩和現象を経て一部ポロイダル磁場に変換され、プラズマ電流の駆動を行っている。スフェロマックの生成は MHD 緩和現象に関する Taylor の理論⁷⁾の検証であると見なせる。Taylor の理論に基づく緩和過程を通して、全磁気ヘリシティが保存する拘束条件の下で磁場配位は最小エネルギー状態に緩和する。この十分緩和した状態 (Taylor 状態) では、電流密度と磁場の大きさの比で表される λ は空間的に一定となる。

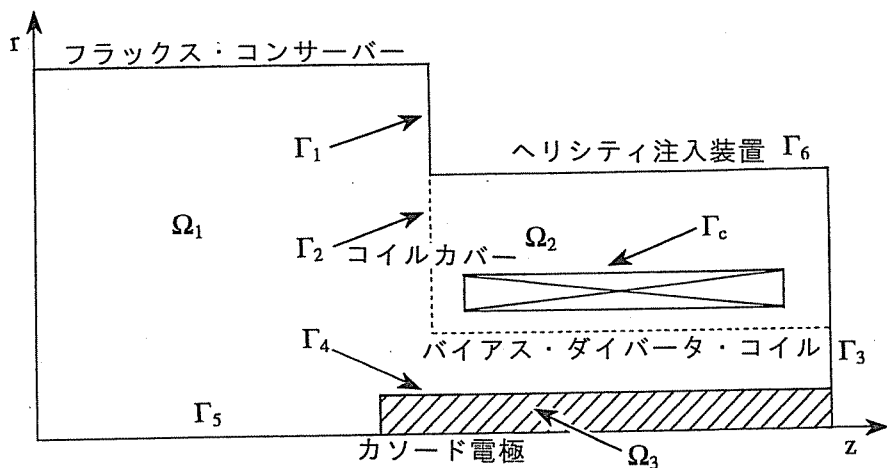


図 1. FACT 装置における FC とヘリシティ注入装置の解析モデル

近年、HD-SPK の平衡計算は集中的に行われている。Taylor と Turner⁸⁾はドラム型と球状の FC だけに閉じ込められている HD-SPK プラズマの平衡を数値的に計算した。彼らは λ 分布が空間的に一定であると仮定し、トロイダル・プラズマがポロイダル方向の電圧と電流の印加だけで維持できることを示した。しかしながら、外部電流によって駆動される静電的ヘリシティ注入の間、緩和過程が続こうとするため、実際の HD-SPK 配位は十分に緩和した状態ではなく、 λ が空間分布をもつ配位となる。我々はそのような配位を部分緩和配位として記述する。彼らの計算は 1) λ 分布が空間的に一定である、2) 計算領域にヘリシティ注

入のためのバイアス・コイル及び電極を含まないため、上で述べた現実の物理現象を反映していない。Kitson と Browning⁹⁾は SPHEX(Spheromak Experiment) 装置の幾何学的構造で、 λ が空間分布をもつ無力磁場配位の HD-SPK 平衡を数値的に決定した。しかしながら、彼らの計算ではバイアス・コイルと電極の有限の大きさの効果が取り入れられていない。彼らは空間的な λ の平均値 $\langle \lambda \rangle_{av}$ と Taylor 状態の固有値 λ_{Taylor} の関係が $\langle \lambda \rangle_{av} < \lambda_{Taylor}$ となることを示した。また、FACT 実験でも $\langle \lambda \rangle_{av}$ の値と磁気軸付近の λ である λ_c の値を比較するため、それらを直接測定した。トロイダル電流の発生過程の間、 λ_c の値は $\langle \lambda \rangle_{av}$ の値よりも大きくなる。一方、閉じた磁気面の崩壊によって、 λ 分布はホロー分布になる。また、 $\langle \lambda \rangle_{av}$ の値が、FACT 装置の FC の形状から決定される $\lambda_{Taylor}(= 16.4\text{m}^{-1})$ より大きくならないことを実験的に検証した。しかしながら、HD-SPK の維持の間、どのような λ 分布が形成されているかという詳細は、まだ明らかにされていない。本研究の動機は、数値計算によってこの問題に答えることである。王¹⁰⁾は有限のプラズマ圧力と空間的な λ 分布を有する CTCC(Compact Torus Collision and Compression)-II 装置の HD-SPK の平衡と安定性について調べた。彼は HD-SPK が λ_{Taylor} の減少に伴って、通常のスフェロマック配位からトカマクに類似した配位まで遷移することを示した。彼は HD-SPK の平衡計算に有限のプラズマ圧力の効果を取り入れたが、コイルや電極の有限の大きさの効果をそれに導入していない。そこで、我々は以下のような効果を取り入れた。1) 空間的に λ が分布を持つ。2) バイアス・コイルと 2 つの電極の大きさが有限である。3) バイアス磁束が電極と鎖交する。4) バイアス・コイルによる真空磁場が FC の外部に漏れる。

本研究の目的は、FACT 装置の FC と静電ヘリシティ注入装置を含む、より現実に近い領域における HD-SPK 平衡の性質を調べることにある。また、FACT 装置固有の考慮すべき独特な点が存在する。それは、バイアス・ダイバータ・コイルに電流を流している時間と種スフェロマック生成時刻と密接に関連している。すなわち、種スフェロマック生成の十分前に準定常的にバイアス・ダイバータ磁束を印加しているため、その磁束は FC 及び電極と鎖交し全空間に広がる。一方、プラズマの寿命は FC やカソード電極の表皮時間に比べて十分短いため、プラズマの作る磁束は FC とカソード電極の両方と鎖交しない。言い換えると、FC はプラズマの作る磁場に対しては完全導体として作用し、バイアス・ダイバータ磁場に対しては抵抗性壁として振る舞う。このような物理現象を含んだ平衡問題は全空間にわたって解く必要があり、開領域問題となる。通常、開領域問題は境界要素法で解くのが容易であるため、本論文では有限差分法と境界要素法の結合法を採用する。

具体的には、 $\nabla \times B = \lambda(\psi)B$ の関係式から導出される Grad-Shafranov 方程式を解くことによって、軸対称 MHD 平衡を得る。ここで、 B と ψ はそれぞれ磁場(プラズマ理工学分野では、磁場は通常、磁束密度を表す。)、ポロイダル磁束関数である。FC の幾何学的構造が十分単純であり、 $\lambda(\psi)$ が空間的に一定であるならば、この方程式は解析的に解くことができる。事実、FC が矩形断面を有し、 $\lambda(\psi)$ が定数と仮定された場合、解析解を得る

ことができる。^{11,12)} 一般的に、 $\lambda(\psi)$ が空間的に分布をもつ場合、数値解法が必要となる。FACT 装置の FC とヘリシティ注入装置を含む複雑な領域において平衡解を決定するためには、その前処理としてその領域の格子生成が必要である。本論文では境界適合型曲線座標系 (Grid-Generation 法)^{10,13-22)} を採用する。この方法の長所は座標曲線がカソード電極の表面、コイルカバー及び FC 壁と一致しているため、Grad-Shafranov 方程式の境界条件を正確に表現できる点である。第 2 節では、FC とヘリシティ注入装置の解析モデルと仮定を与える。第 3 節では、解析モデルに対する支配方程式と境界条件を導出する。第 4 節では、第 3 節で導出した支配方程式を解く数値計算法について述べる。第 5 節では、平衡解から安全係数を求めることによって、 $\lambda(\psi)$ 分布とバイアス・ダイバータ磁場の漏れの HD-SPK 平衡配位への影響について調べる。第 6 節において得られた結果をまとめている。

2. 解析モデル

FACT 装置の HD-SPK 実験では直径 587mm、全長 315mm のドラム型の FC を使用し、FC の底にヘリシティ注入装置を設置している。ヘリシティ注入装置はバイアス・ダイバータ・コイル、コイルカバー (アノード電極)、カソード電極から構成される。バイアス・ダイバータ・コイルは、2 種類のコイル (コイル 1: 直径 110mm、全長 240mm、コイル 2: 直径 375mm、全長 120mm) を 2 個直列に接続して用いられている。また、直径 60mm、全長 673.5mm のカソード電極が使用され、FC の中心対称軸上に設置されている。図 1 に本論文で用いる FC とヘリシティ注入装置の解析モデルを示す。簡単のため、2 個直列接続したバイアス・ダイバータ・コイルを 1 つのコイル (直径 250mm、全長 255.7mm) で近似することにする。

図 1 のように FC の中心対称軸を z 軸とする円柱座標 (z, r, φ) を用いる。軸対称の仮定の下で HD-SPK の平衡配位は、Grad-Shafranov 方程式を z - r 平面内で解くことによって決定できる。解析領域を 3 つの部分領域 Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 に分割する。部分領域 Ω_1 は FC の壁 Γ_1 、コイルカバー Γ_2 、境界 Γ_3 、カソード電極表面 Γ_4 、 z 軸 Γ_5 に囲まれた領域であり、部分領域 Ω_2 はコイルカバー Γ_2 、境界 Γ_6 、バイアス・ダイバータ・コイルの表面 Γ_C に囲まれた領域である。さらに、部分領域 Ω_3 はカソード電極の断面領域である。

上で述べた解析モデルに対して以下のような仮定を設ける。先ずプラズマは部分領域 Ω_1 内にだけ存在し、プラズマの作る磁場は部分領域 Ω_1 と Ω_2 にだけ広がるものとする。この仮定はプラズマの作る磁場がコイルカバー Γ_2 を横切るとき、ポロイダル磁場の連続性とトロイダル磁場の不連続性を導く。しかしながら、この不連続性は実際のところ、オープン磁力線に沿って流れるポロイダル電流によって生じる。次に、プラズマの作る磁場は FC の外とカソード電極内に漏れないものとする。この仮定はプラズマの寿命が FC とカソード

電極の表皮時間に比べて十分短く、コイルカバーのそれよりも長いという物理現象を反映している。一方、バイアス・ダイバータ・コイルの磁場はFCの外及びカソード電極内に漏れ、全空間に広がっているものとする。この理由はバイアス・ダイバータ磁場が、プラズマのFCへの入射の十分前に準定常的に印加され、広がっているためである。したがって、平衡配位が形成されたとき、バイアス・ダイバータ磁場は全空間に広がっている。

3. 支配方程式と境界条件

前節で述べた仮定の下で支配方程式と境界条件について説明する。ポロイダル磁束関数に対する Grad-Shafranov 方程式は

$$-\hat{L}\psi = F(z, r, \psi) \quad (1)$$

で記述される。ここで、 \hat{L} は

$$\hat{L} \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

で定義される。また、一般に $F(z, r, \psi)$ は

$$F(z, r, \psi) \equiv \chi_\Omega(z, r) \left(r^2 \frac{dp}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} \right) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $\chi_\Omega(z, r)$ は

$$\chi_\Omega(z, r) \equiv \begin{cases} 1 & ; (z, r) \in \Omega_1, \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

で定義される特性関数であり、 p と I はそれぞれプラズマの圧力とトロイダル磁束関数である。方程式 (1) の右辺を仮定することによって、一般的な方程式 (1) を解く問題を明確にする。HD-SPK の β 値は十分に小さいため、プラズマの圧力の効果を見捨てる。したがって、プラズマの圧力に関する仮定は

$$p(\psi) = 0 \quad (5)$$

となり、さらに λ が ψ に関して線形的に変化する部分緩和配位モデル

$$\lambda(\psi) = \frac{\hat{\lambda}}{R} [1 + \alpha(2\bar{\psi} - 1)] \quad (6)$$

を仮定する。ここで、 $\bar{\psi} = \psi / \psi_{\text{axis}}$ である。また、 ψ_{axis} は磁気軸での ψ の値であり、 R は FC の半径を示す。さらに、注意すべきことは、 $\hat{\lambda}/R$ が ψ に関する $\lambda(\psi)$ の平均値であり、それが幾何学的構造と α によって決定されることである。電流ピーキングパラメータ α は、以下のようにトロイダル電流密度 j_φ の空間分布を変化させる。電流密度が磁気軸付近にピークした分布は $\alpha > 0$ のときであり、ホロー分布は $\alpha < 0$ のときである。特に $\alpha = 0$ の場合は

完全に緩和した配位 (Taylor 状態) であり、それ以外の配位は部分緩和配位となる。このようにパラメーター α は電流密度分布を変形させる重要な役割を果たす。式 (5) と式 (6) の仮定は、CTX (Compact Toroid Experiment) 実験²⁾や SPHEX 実験³⁾で用いられてものと同様である。

次に方程式 (1) の境界条件について考える。前節の仮定よりプラズマは Ω_1 にしか存在せず、 Ω_1 と Ω_2 にしか磁束を作らないので、 $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ 上での境界条件は $\psi = \psi_D$ で与えられる。ここで、 ψ_D はコイルの作る磁束を示す。さらに、コイルの境界 Γ_C 上では Ampère の法則が成り立つので、 ψ は

$$\oint_{\Gamma_C} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} dl = \frac{I_C}{I_P} \iint_{\Omega_1} \frac{F(z, r, \psi)}{r} dz dr \quad (7)$$

を満たす。但し、 $\partial/\partial n$ は境界 Γ_C 上での外向き法線微分を示し、 I_C, I_P はそれぞれコイル電流とプラズマ電流である。また、境界 Γ_C 上での ψ は未知定数である。ここで、式 (5) と式 (6) の仮定の下で方程式 (1) は

$$-\hat{L}\psi = \mu \psi_{\text{axis}} f(z, r, \tilde{\psi}) \quad (8)$$

となる。但し、 μ は λ^2 であり、 $f(z, r, \tilde{\psi})$ は

$$f(z, r, \tilde{\psi}) = \frac{\chi \Omega(z, r)}{R^2} \left[(1 - \alpha)^2 \tilde{\psi} + 3\alpha(1 - \alpha) \tilde{\psi}^2 + 2\alpha^2 \tilde{\psi}^3 \right] \quad (9)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda(\psi) = dI/d\psi$ の関係を用いた。方程式 (8) と境界条件はそれぞれパラメーター $\mu, \alpha, I_C/I_P$ を持っている。ここで、 α と I_C/I_P が与えられれば、方程式 (8) と境界条件は固有値 μ をもつ非線形固有値問題を構成する。平衡配位は最小固有値に対応する固有関数を求めることによって決定できる。

方程式 (8) は非線形であるため、解析的に解くことは不可能である。そこで、非線形固有値問題をプラズマ電流が一定となる反復法を用いて解くことにする。第 m 回目の反復では、線形化された方程式 (8)、すなわち、

$$-\hat{L}\psi^{(m)} = \mu^{(m-1)} \psi_{\text{axis}}^{(m-1)} f(z, r, \tilde{\psi}^{(m-1)}) \equiv r j_\varphi^{(m-1)}(z, r) \quad (10)$$

の境界値問題を解き、引き続いて $\psi^{(m)}$ を用いて固有値を

$$\mu^{(m)} = I_{P0} / \left[\psi_{\text{axis}}^{(m)} \iint_{\Omega_1} \frac{f(z, r, \tilde{\psi}^{(m)})}{r} dz dr \right] \quad (11)$$

によって更新する。ここで、上付き文字 (m) は反復回数、 I_{P0} は既知定数である。この反復を $\mu^{(m)}$ と $\psi^{(m)}$ の両方が収束するまで繰り返す。本手法を用いることによって非線形固有値問題を解くことができる。

4. 数値計算法

方程式 (10) は特性関数を含むため、各領域で解くべき方程式が異なってくる。本節では境界要素法と有限差分法の結合法を用いて方程式 (10) を解く数値計算法について説明する。第 m 回目の反復において方程式 (10) の境界値問題を解く際に $\psi^{(m)}$ を

$$\psi^{(m)} = \psi_P^{(m)} + \psi_D \quad (12)$$

のように分割して各々の項をそれぞれ異なった境界値問題を解くことによって $\psi^{(m)}$ を決定する。ただし、 $\psi_P^{(m)}$ は m 回目の反復において $j_\varphi^{(m-1)}(z, r)$ が作る磁束である。

まず、 ψ_D は

$$-\hat{L}\psi_D = 0 \quad (13)$$

の境界値問題の解である。 ψ_D の境界条件は、Ampère の法則を考慮して

$$\oint_{\Gamma_C} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_D}{\partial n} dl = \frac{I_C}{I_P} I_{P0} \quad (14)$$

と書ける。さらに、 Γ_C 上で ψ_D は未知定数である。上記の支配方程式と境界条件はコイルの外側領域での境界値問題であり、開領域問題を構成している。通常、開領域問題は境界要素法で解くのが容易である。方程式 (13) と境界条件を境界要素法を用いて定式化する。境界要素法の標準的な手法を用いることによって、方程式 (13) に対する境界積分方程式

$$c(z_i, r_i) \psi_D(z_i, r_i) = \oint_{\Gamma_C} \left(\frac{w}{r} \frac{\partial \psi_D}{\partial n} - \frac{\psi_D}{r} \frac{\partial w}{\partial n} \right) dl \quad (15)$$

が容易に導出される。ここで、 $c(z_i, r_i)$ は形状係数であり、基本解 w は

$$w(z, r; z_i, r_i) = \frac{\sqrt{r_i r}}{2\pi k} \left[(2 - k^2) K(k) - 2E(k) \right] \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 $K(k)$ と $E(k)$ はそれぞれ第一種及び第二種完全楕円積分を示しており、母数 k は

$$k^2 \equiv \frac{4r_i r}{(r + r_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (17)$$

で定義される。コイル表面 Γ_C を N 個の節点を持つ N 個の 1 次境界要素の集合 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$ に分割すると、方程式 (15) は

$$H\psi_D = Gq_D \quad (18)$$

となる。ここで、 H と G は影響行列を示し、 ψ_D と q_D はそれぞれ

$$\psi_D \equiv [\psi_{D1}, \psi_{D2}, \dots, \psi_{DN}]^T, \quad q_D \equiv [q_{D1}, q_{D2}, \dots, q_{DN}]^T$$

で定義される節点ベクトルである。ただし、 ψ_{Dj} と q_{Dj} はそれぞれ j 番目の境界節点上での ψ_D と $\partial \psi_D / \partial n$ の値を示す。また、境界条件は ψ_D と q_D を用いて

$$t^T q_D = \frac{I_C}{I_P} I_{P0}, \quad (19)$$

$$B_C \psi_D = 0 \quad (20)$$

と書ける。ただし、 t^T は

$$t^T \equiv \left[0, \dots, 0, \sum_{e=1}^N \sum_{k=1}^2 \int_{\gamma_e} \frac{\phi_k}{r} d\Gamma, 0, \dots, 0 \right] \quad (21)$$

で定義される行ベクトルであり、 ϕ_k は線形形状関数である。また、線積分は e 番目の境界要素 γ_e 上で計算される。上式において、非零要素は第 $\sigma(e, k)$ 列に位置している。ここで、 $\sigma(e, k)$ は境界要素 γ_e 上の k 番目の節点番号を表す。さらに、 B_C は $(N-1) \times N$ の行列であり

$$B_C \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

で定義される。式(18)、式(19)、式(20)を組み合わせることによって

$$\begin{bmatrix} H & -G \\ B_C & 0 \\ 0^T & t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_D \\ q_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (I_C/I_P)I_{P0} \end{bmatrix} \quad (23)$$

を得る。方程式(23)を解くことによって、コイル表面 Γ_C 上での ψ_{Dj} と q_{Dj} を決定できる。また、コイル外部の任意の点 (z, r) における ψ_D の値は、 ψ_{Dj} と q_{Dj} を用いて内点公式によって計算できる。

次に $\psi_P^{(m)}$ の計算方法について述べる。方程式(10)から方程式(13)を引くと、 $\psi_P^{(m)}$ に対する支配方程式：

$$-\hat{L}\psi_P^{(m)} = r j_\phi^{(m-1)}(z, r) \quad (24)$$

を得る。一方、 $\psi_P^{(m)}$ の境界条件は $\psi^{(m)}$ と ψ_D の境界条件より導き出せる。すなわち、コイル表面 Γ_C 上では、 $\psi_P^{(m)}$ は未知定数であり、その法線微分は

$$\oint_{\Gamma_C} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_P^{(m)}}{\partial n} dl = 0 \quad (25)$$

を満たす。さらに、境界 $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ 上では

$$\psi_P^{(m)} = 0 \quad (26)$$

である。上記の境界条件の下で方程式(24)を解けば、 $\psi_P^{(m)}$ を得ることができる。しかし、方程式(24)は特性関数 $\chi_\Omega(z, r)$ を含んでおり、同関数を数値的に表現することは困難である。そこで、方程式(24)を領域 Ω_1, Ω_2 内で別々に計算し、コイルカバー表面 Γ_2 上でのポロイダル磁場の接線方向成分と磁束密度の法線方向成分が連続になるようにする。ちなみに、表面電流がコイルカバーに沿って流れているため、トロイダル磁場はコイルカバーの境界 Γ_2 を横切るときに不連続になりうる。上記の連続条件を $\psi_P^{(m)}$ を用いて表現すれば

$$\left[\left[\psi_P^{(m)} \right] \right] = 0, \quad (27)$$

$$\left[\left[\frac{\partial \psi_P^{(m)}}{\partial n} \right] \right] = 0 \quad (28)$$

を得る。ここで、演算子[[.]]は2つの領域を仕切る境界を横切った際に生じるオペランドのギャップを表している。この Γ_2 上での界面条件を自己矛盾なく満足させるため、2ステップからなる反復法を採用する。第1ステップでは境界値問題

$$-\hat{L}\psi_P^{(m)} = 0, \quad \text{in } \Omega_2 \quad (29)$$

を境界要素法を用いて解く。境界要素法の標準的離散化を行うと方程式 (29) は

$$H\psi_P^{(m)} = Gq^{(m)} \quad (30)$$

となる。一方、境界条件は Γ_C 上で

$$B_C\psi_P^{(m)} = 0, \quad (31)$$

$$t^T q^{(m)} = 0 \quad (32)$$

が成り立つ。さらに、 Γ_6 上では

$$E\psi_P^{(m)} = 0 \quad (33)$$

が成り立つ。ここで、 E は単位行列である。コイルカバー Γ_2 上では境界条件として1回前の反復値を用いることによって

$$E\psi_P^{(m)} = \psi_P^{(m-1)} \quad (34)$$

と表記できる。したがって、第1ステップで方程式 (29) を数值的に解くことによって境界 Γ_2 上での $\partial\psi_P^{(m)}/\partial n$ を決定する。第2ステップでは、第1ステップで得られた境界 Γ_2 上での $\partial\psi_P^{(m)}/\partial n$ の値を利用して方程式 (24) の境界値問題を部分領域 Ω_1 の中で解く。ここで、 Ω_1 の領域形状は複雑であるため、 Ω_1 内に境界適合型曲線座標系 $(\xi, \eta)^{20-22})$ を構成し、方程式 (24) を (ξ, η) で書き直した方程式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{J^2}\bar{\Delta}\psi + \frac{1}{rJ}\frac{\partial(\psi, z)}{\partial(\xi, \eta)} + \frac{1}{J^2}\left[-\bar{\Delta}z\frac{\partial(\psi, r)}{\partial(\xi, \eta)} + \bar{\Delta}r\frac{\partial(\psi, z)}{\partial(\xi, \eta)}\right] \\ = -\frac{\mu}{R^2}\left[(1-\alpha)^2\psi + 3\alpha(1-\alpha)\psi^2 + 2\alpha^2\psi^3\right] \end{aligned} \quad (35)$$

を変換平面内で解くことによって、領域 Ω_1 の $\psi_P^{(m)}$ を決定する。但し、演算子 $\bar{\Delta}$ は

$$\bar{\Delta} \equiv \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

で定義され、 α, β, γ, J はそれぞれ

$$\alpha = r_\eta^2 + z_\eta^2, \quad \beta = z_\xi z_\eta + r_\xi r_\eta, \quad \gamma = r_\xi^2 + z_\xi^2, \quad J = z_\xi r_\eta - z_\eta r_\xi$$

で定義される計量テンソル及びヤコビアンである。上記の2つのステップを境界 Γ_2 上での $\psi_P^{(m)}$ の値が収束するまで反復を行う。図2にFACT装置内に生成した境界適合型曲線座標系を示す。第1ステップで使用する境界節点は境界 Γ_2 上に生成されるので、それらは境界適合型曲線座標系の境界上の格子点と一致しなければならない。図2において○印は生

成された境界節点を示す。以上の手法を用いることにより ψ_D , $\psi_P^{(m)}$ が決定され、FC内の ψ_P を求めることができる。この手法を非線形固有値問題の解法アルゴリズムに組み込めば、平衡配位を数値的に決定できることになる。

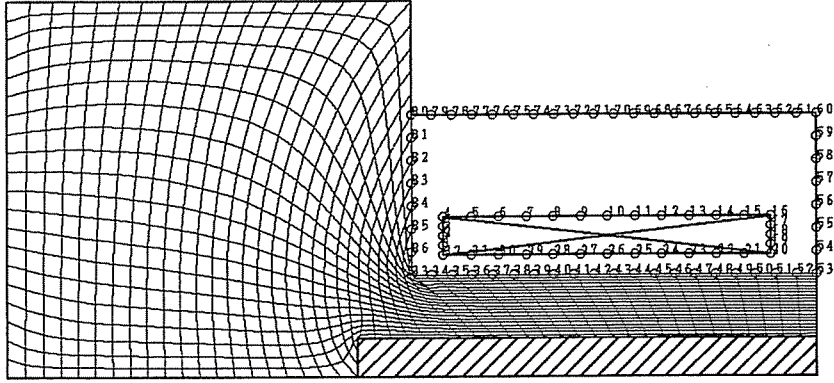


図 2. FACT 装置内の境界適合型曲線座標系と境界節点

5. 数値計算結果

前節で述べた数値計算手法を用いることによって、平衡配位を数値的に決定した。本節では、 ψ に関して線形的に変化する $\lambda(\psi)$ 分布とバイアス・ダイバータ磁場のFC外部への漏れの平衡配位への影響を調べる。先ず基本的なHD-SPK平衡の性質を調べる。電流分布パラメータ $\alpha = 0.0$ 、すなわち、Taylor状態での典型的なポロイダル磁束の等高線を図3に示す。特に $I_C/I_P = 0.0$ の場合の平衡配位は、オープン磁束のない古典スフェロマックに相当する。図3から I_C/I_P の値の増加に伴って、カソード電極と鎖交するオープン磁束の量は大きくなることが分かる。したがって、 I_C/I_P の値が増加するにつれて、ヘリシティ注入装置によるプラズマ電流の駆動が容易になる。図3の平衡配位に対するセパトリックスの内側の磁束と全磁束の比を求めた。その比は I_C/I_P の値が0.4から1.0に増加するにつれて、単調に0.55から0.17に減少し、 $\lambda(\psi)$ の空間的平均値も5.0%から13.1%に減少する。また、 I_C/I_P の値の増加に伴って、磁気軸はバイアス・ダイバータ・コイルの方に近づく。さらに、カソード電極と鎖交するオープン磁束はFC内壁と鎖交するため、オープン磁束付近ではプラズマは冷たくなっている。したがって、FCの内壁周辺にフラックス・ホールが形成されていると考えられる。

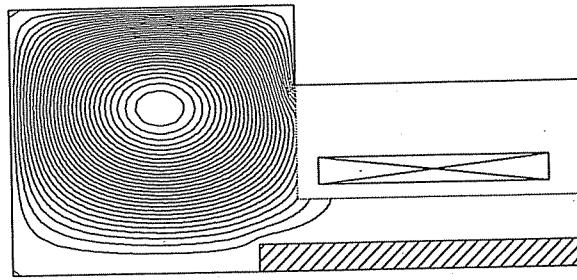
電流分布パラメータ α の安全係数への影響を調べる。安全係数を ψ/ψ_{axis} の関数として計算し、図4に示す。通常、安全係数 $q(\bar{\psi})$ は

$$q(\bar{\psi}) = \frac{I(\bar{\psi})}{2\pi} \oint_{\psi=\bar{\psi}} \frac{dl}{r|\nabla\psi|} \quad (36)$$

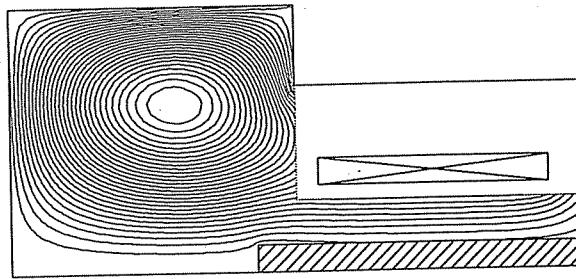
で与えられる。ここで、その線積分は $\psi = \bar{\psi}$ の磁気面と $\varphi = \text{const.}$ の平面の交線である閉じた等高線に沿って実行される。等間隔に分割した磁気面、 $\bar{\psi} = \psi_s + j\Delta\psi$ ($j = 0, 1, \dots, 19$) 上で安全係数を求めた。ここで、 $\Delta\psi = (\psi_{\text{axis}} - \psi_s)/20$ とし、 ψ_s はセパトリックス上の ψ の値である。図4から α の増加に伴って、安全係数は小さくなることが分かる。例えば、図4(a)の電流密度がピーキングした分布 ($\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$) の安全係数は、 $\alpha = 0.0$ のそれよりもずっと小さくなる。一方、図4(b)の電流密度がホロー分布 ($\alpha = -0.05, -0.10, -0.15$) の安全係数は、 $\alpha = 0.0$ のそれに比べるとずっと大きくなる。一般に、磁気軸付近に電流密度が集中した分布では、安全係数は小さくなる。これは主に閉じた磁気面領域に集中したトロイダル電流によって、ポロイダル磁束が増加することを示唆している。対照的に、スフレロマックの周辺部分に電流密度が集中した分布では、それに対応する安全係数は大きくなる。これはオープン磁束に沿って流れるポロイダル電流の増加によって、トロイダル磁束が増加していることを表している。さらに、 α の増加に伴って、セパトリックス近くの安全係数の急峻な立ち上がりは緩やかになる。

次にバイアス・ダイバータ磁場のFC壁からの漏れの平衡配位への影響を調べる。この目的のため、バイアス・ダイバータ磁場に対してFC壁が完全導体として振る舞う場合の平衡配位を計算し、安全係数を求めた。その完全導体FCとは対照的に、第2節で用いたFCは抵抗性FCである。これ以後、バイアス・ダイバータ磁場の漏れの効果の有無で、完全導体FCと抵抗性FCをそれぞれNon-EffectモデルとEffectモデルと呼ぶことにする。EffectモデルとNon-Effectモデルの安全係数を図5に示す。Effectモデルの安全係数はNon-Effectモデルのそれよりも大きい。また、Effectモデルのセパトリックスの内側の磁束は、Non-Effectモデルのそれよりも小さい。特に $I_C/I_P = 0.4$ の場合、磁気軸付近の安全係数はどちらのモデルでもほとんど同じであるが、セパトリックス付近のそれはNon-Effectモデルに比べてEffectモデルの方が若干(5.1%)大きくなっている。また、 I_C/I_P の値が小さいとき、どちらのモデルに対しても磁気軸付近の安全係数はほとんど同じである。さらに、 I_C/I_P の値の増加に伴って、安全係数も大きくなる。これはオープン磁束に沿って流れるポロイダル電流の増加によって、トロイダル磁束が強くなるためである。FC外部へのバイアス・ダイバータ磁場の漏れの効果は、全体的な安全係数の上昇と閉じた磁束の減少を引き起こす。これは空間全体にわたるポロイダル磁束の減少のためであろう。

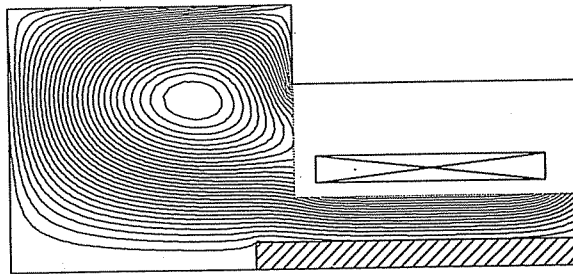
本節では数値的に求めた平衡解から安全係数を計算することによって、 ψ に関して線形的に変化する $\lambda(\psi)$ 分布とバイアス・ダイバータ磁場のFC外部への漏れの平衡配位への影響を調べた。その結果、空間分布をもつ $\lambda(\psi)$ は、バイアス・ダイバータ磁場の漏れよりも平衡配位と安全係数の変化に大きな影響を与えることが分かった。



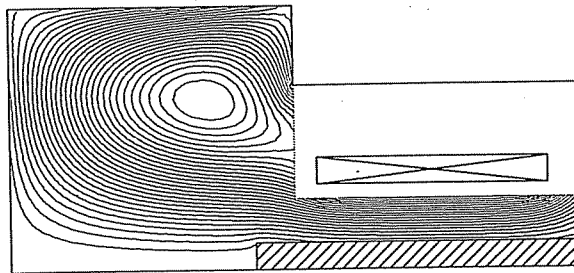
(a)



(b)

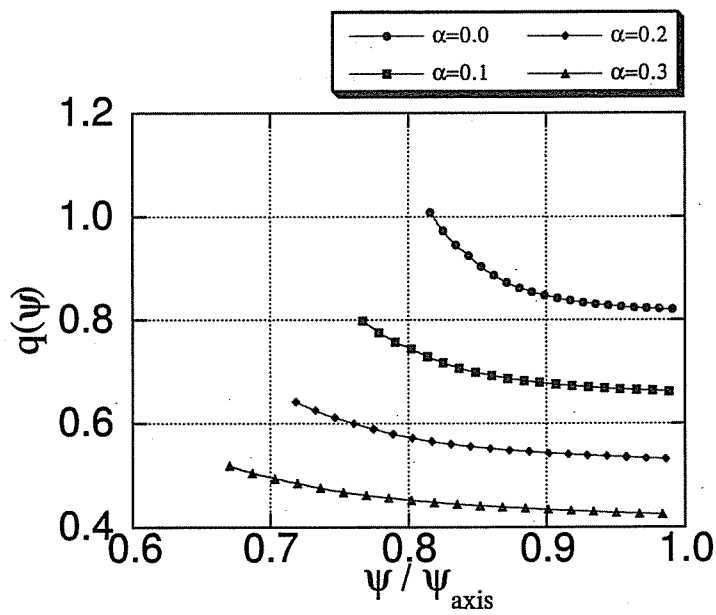


(c)

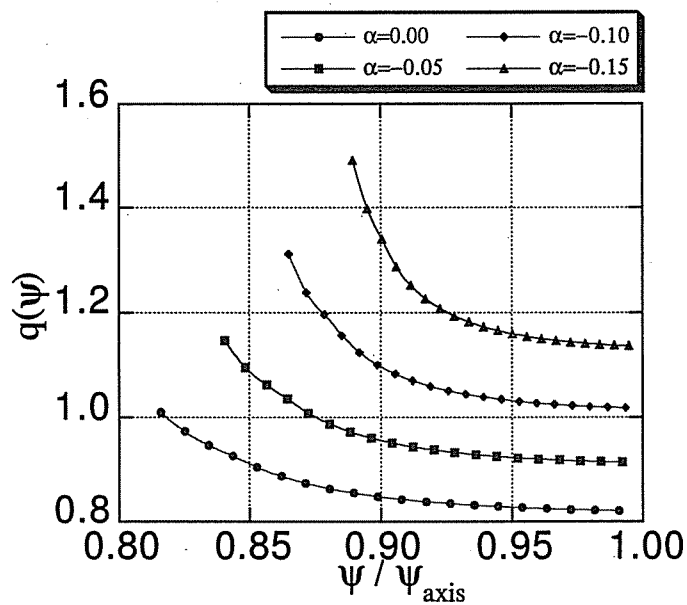


(d)

図 3. Taylor 状態 ($\alpha = 0.0$) における典型的なポロイダル磁束の等高線。
 $I_C/I_P = 0.0$, $\hat{\lambda}/R = 16.13\text{m}^{-1}$ (a), $I_C/I_P = 0.4$, $\hat{\lambda}/R = 15.32\text{m}^{-1}$ (b),
 $I_C/I_P = 0.8$, $\hat{\lambda}/R = 14.45\text{m}^{-1}$ (c), $I_C/I_P = 1.0$, $\hat{\lambda}/R = 14.01\text{m}^{-1}$ (d)。



(a)



(b)

図4. 安全係数 q の α に対する依存性 ($I_C/I_P = 1.0$)。
ピーキング電流分布 ($\alpha \geq 0$) (a), ホロー電流分布 ($\alpha \leq 0$) (b)。

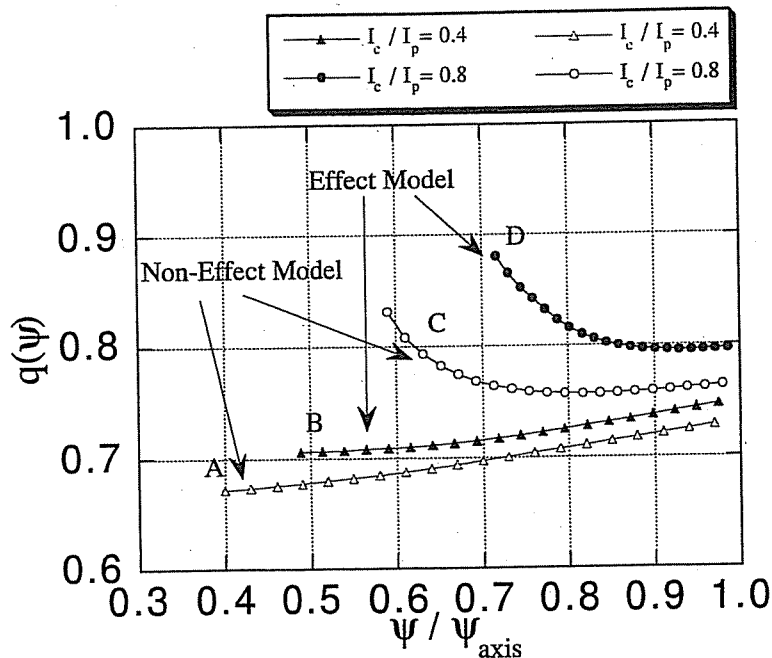


図5. バイアス・ダイバータ磁場の漏れの効果がある場合とない場合による安全係数 q の相違。
A と C: 漏れの効果がないモデル, B と D: 漏れの効果があるモデル ($\alpha = 0.0$)。

6. まとめ

姫路工業大学の FACT 実験で得られている結果を理論的に説明する目的で, MHD 平衡配位を数値的に決定した。具体的には, これまでの平衡計算の研究において取り入れられていない, 1) FC と静電ヘリシティ注入装置を含む, より実験に即した複雑な領域, 2) バイアス・ダイバータ磁場の FC 外部への漏れ, 3) 部分緩和配位モデルを考慮した。これらの項目を満足するために, これまで採用されていない新しい数値計算手法として有限差分法と境界要素法の結合法を用いることによって, MHD 平衡を記述する Grad-Shafranov 方程式を数値的に解いた。数値平衡解から決定されるポロイダル磁束の等高線と安全係数を評価することによって, 基本的な HD-SPK 平衡の性質を調べた。特に電流分布パラメータ α を変化させることによって, Talyor 状態 (完全緩和配位) から部分緩和配位に遷移させ, 安全係数などの変化について議論をした。その結果, スフェロマックの周辺部分に電流密度が集中した分布では, それに対応する安全係数は大きくなり, 磁気軸付近に電流密度が集中した分布では, 安全係数は小さくなることが分かった。また, バイアス・ダイバータ磁場の FC 外部への漏れの効果は, 空間全体にわたるポロイダル磁束の減少のため, 全体的な安全係数の上昇を引き起こし, セパトロリックスの内側のポロイダル磁束を減少させる。以上の計算結果を詳細に考察することによって, ψ に関して線形的に変化する $\lambda(\psi)$ 分布モデルは, バイアス・ダイバータ磁場の FC 外部への漏れの効果よりも, 平衡配位と安全係数の変化に大きな影響を与えることが判明した。

参考文献

- 1) T. R. Jarboe, I. Henins, A. R. Sherwood, C. W. Barnes and H. W. Hoida: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 39.
- 2) S. O. Knox, C. W. Barnes, G. J. Marklin, T. R. Jarboe, I. Henins, H. W. Hoida and B. L. Wright: Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 842.
- 3) P. K. Browning, G. Cunningham, R. Duck, S. J. Gee, K. J. Gibson, D. A. Kitson, R. Martin and M. G. Rusbridge: Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 1722.
- 4) M. Nagata, T. Masuda, S. Naito and T. Uyama: J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 3203.
- 5) M. Nagata, T. Kanki, T. Masuda, S. Naito, H. Tatsumi and T. Uyama: Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 4342.
- 6) M. Nagata, T. Kanki, T. Masuda, S. Naito, H. Tatsumi and T. Uyama: Journal of Plasma and Fusion Research **69** (1993) 474 [in Japanese].
- 7) J. B. Taylor: Rev. Mod. Phys. **58** (1986) 741.
- 8) J. B. Taylor and M. F. Turner: Nucl. Fusion **29** (1989) 219.
- 9) D. A. Kitson and P. K. Browning: Plasma Phys. and Controlled Fusion **32** (1990) 1265.
- 10) Y. P. Wang: J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 3359.
- 11) L. Turner: Phys. Fluids **27** (1984) 1677.
- 12) M. Katsurai: private communication.
- 13) A. Kamitani, T. Kanki, M. Nagata and T. Uyama: *Advanced Computational Electromagnetics*, ed. T. Honma (IOS Press, Amsterdam, 1995) Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics Vol. 9, p.373.
- 14) S. Kaneko and A. Kamitani: J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 458.
- 15) A. Kamitani, S. Kaneko, T. Uyama and K. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 2755.
- 16) S. Kaneko and Y. P. Wang: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 553.
- 17) T. Kanki, M. Nagata, T. Uyama, M. Miyauchi and A. Kamitani: *Simulation and Design of Applied Electromagnetic Systems*, ed. T. Honma (Elsevier Science, Amsterdam, 1994) Elsevier Studies in Applied Electromagnetics in Materials Vol. 5, p. 85.
- 18) A. Kamitani, S. Ikuno, T. Kanki, M. Nagata and T. Uyama: *Nonlinear Electromagnetics Systems*, eds. A. J. Moses and A. Basak (IOS Press, Amsterdam, 1996) Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics Vol. 10, p.194.
- 19) T. Kanki, M. Nagata, T. Uyama, S. Ikuno and A. Kamitani: J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 140.
- 20) J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin: J. Comp. Phys. **15** (1974) 299.
- 21) J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin: J. Comp. Phys. **24** (1977) 274.
- 22) J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi and C. W. Mastin: *Numerical Grid Generation* (Elsevier Science, North-Holland, New York, Amsterdam and Oxford, 1985).